

## Rozdział 4

## ROZCIĄGANIE I ŚCISKANIE OSIOWE

## Zadanie 4.1

Dla pręta nieważkiego, obciążonego siłami działającymi wzdłuż jego osi (por. rys. 4.1a), obliczyć całkowite wydłużenie oraz ekstremalne naprężenia normalne. Przekrój poprzeczny pręta jest zmienny skokowo i wynosi  $A_{AC} = 2A$ ,  $A_{CE} = A$ , moduł sprężystości podłużnej materiału  $E$ .

Zakładamy, że ekstremalne naprężenia normalne nie przekraczają naprężeń równych granicy proporcjonalności. Wtedy do obliczenia wydłużenia możemy posługiwać się związkiem fizycznym

$$\Delta l = \sum_i \frac{N_i l_i}{E_i A_i}$$

a do obliczenia naprężeń normalnych w przekrojach prostopadłych do osi pręta wzorem

$$\sigma = \frac{N_i}{A_i}$$

gdzie  $N_i$  siła podłużna na danym odcinku,  $l_i$ ,  $A_i$  – długość i pole przekroju poprzecznego tego odcinka,  $E_i$  – moduł sprężystości podłużnej.

Przy obliczeniu wydłużenia całkowitego sumowanie obejmuje wszystkie odcinki pręta.

Wydłużenie pręta możemy obliczyć stosując zasadę superpozycji (por. rys. 4.1b), wtedy

$$\begin{aligned} \Delta l &= \frac{P_3 l_{CE}}{EA_{CE}} + \frac{P_3 l_{AC}}{EA_{AC}} + \frac{-P_2 l_{CD}}{EA_{CE}} + \\ &+ \frac{-P_2 l_{AC}}{EA_{AC}} + \frac{P_1 l_{AB}}{EA_{AC}} = \frac{Pl}{EA} + \\ &+ \frac{Pl}{E \cdot 2A} - \frac{2P \cdot \frac{3}{4}l}{EA} - \frac{2P \cdot l}{E \cdot 2A} + \\ &+ \frac{3P \cdot \frac{1}{2}l}{E \cdot 2A} = -\frac{1}{4} \frac{Pl}{EA} \end{aligned}$$

lub wykonując wykres sił podłużnych od wszystkich obciążeń (por. rys. 4.1c) – wtedy

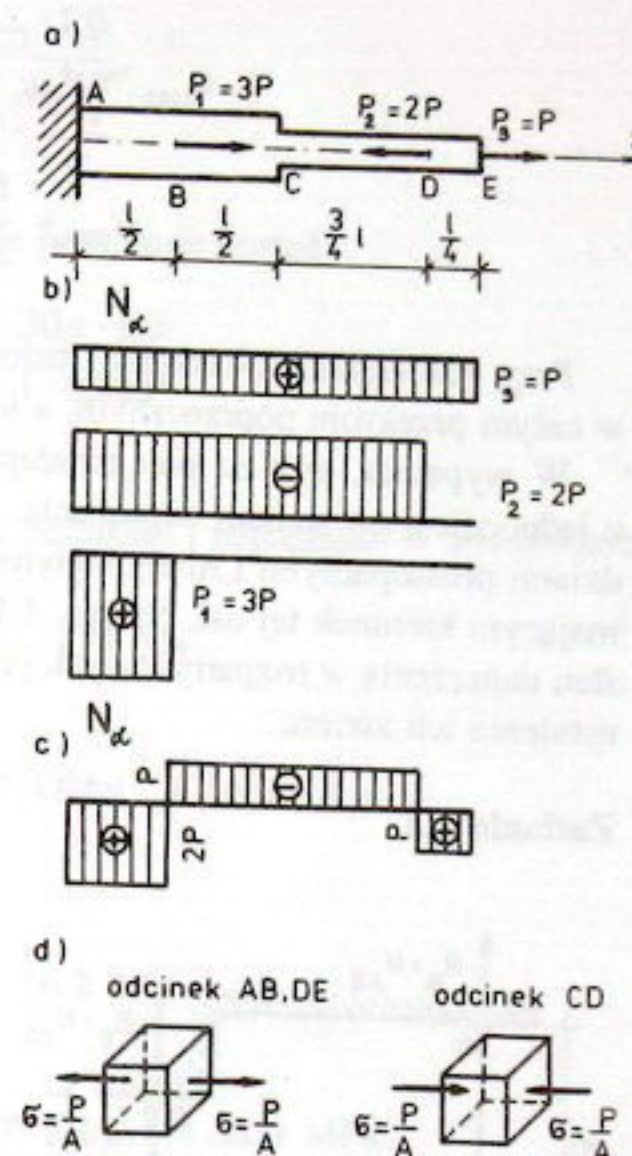
$$\begin{aligned} \Delta l &= \frac{N_a^{DE} \cdot l_{DE}}{EA_{CE}} + \frac{N_a^{BD} \cdot l_{CD}}{EA_{CE}} + \frac{N_a^{BD} \cdot l_{BC}}{EA_{AC}} + \frac{N_a^{AB} \cdot l_{AB}}{EA_{AC}} = \\ &= \frac{P \cdot \frac{1}{4}l}{EA} + \frac{-P \cdot \frac{3}{4}l}{EA} + \frac{-P \cdot \frac{1}{2}l}{E \cdot 2A} + \frac{2P \cdot \frac{1}{2}l}{E \cdot 2A} = -\frac{1}{4} \frac{Pl}{EA} \end{aligned}$$

Ponieważ otrzymaliśmy wynik ze znakiem ujemnym oznacza to, że pręt ulegnie skróceniu.

Naprężenie normalne ujemne (ściskające) wystąpią na odcinku  $BD$  (por. rys. 4.1c), przy czym ekstremalne, obliczone dla przekroju leżącego na odcinku  $CD$  wynoszą

$$\sigma_{\min} = \sigma_{CD} = \frac{N_{BD}}{A_{CD}} = \frac{-P}{A} = -\frac{P}{A}$$

Naprężenia normalne dodatnie (rozciągające) wystąpią na odcinkach  $AB$  i  $DE$ , przy czym łatwo zauważyć, że ich wartości będą takie same



Rys. 4.1



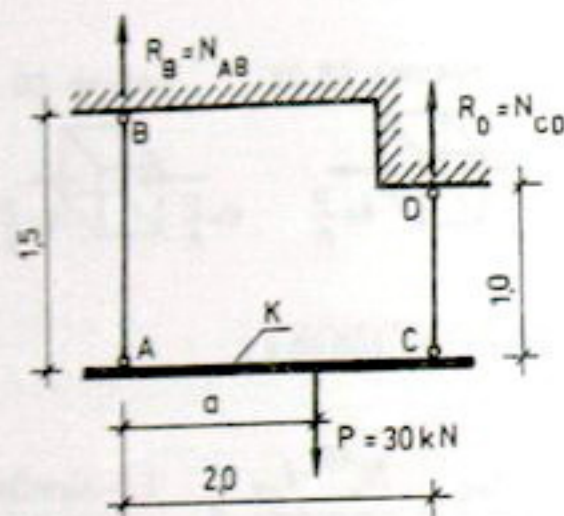
$$\sigma_{\max} = \sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{A_{AC}} = \frac{+2P}{2A} = +\frac{P}{A},$$

$$\sigma_{DE} = \frac{N_{DE}}{A_{CE}} = \frac{+P}{A} = +\frac{P}{A}.$$

Przy rozciąganiu (ściskaniu) osiowym naprężenia normalne mają wartości stałe w całym przekroju poprzecznym, a ich kierunek jest równoległy do kierunku siły  $N$ .

W wypadku, gdy na pręt działają wyłącznie siły podłużne, mamy do czynienia z jednoosiowym stanem naprężenia, elementarny wycinek pręta ograniczony krawędziami prostopadłymi i równoległymi do jego osi  $x$  podlega wyłącznie naprężeniom, mającym kierunek tej osi. Na rys. 4.1d pokazano na takich elementarnych wycinkach stan naprężenia w rozpatrywanych przekrojach, przy czym znak naprężeń posłużył do ustalenia ich zwrotu.

#### Zadanie 4.2



Rys. 4.2

Nieodkształcalny element  $K$  podwieszono do nieodkształcalnego stropu za pośrednictwem dwóch sprężystych wieszaków  $AB$  i  $CD$ . Wieszak  $AB$  jest wykonany ze stali ( $E_s = 2 \cdot 10^5$  MPa) i ma średnicę  $d_1 = 20$  mm, wieszak zaś  $CD$  z miedzi ( $E_m = 1 \cdot 10^5$  MPa) i ma średnicę  $d_2 = 25$  mm. Pozostałe dane jak na rys. 4.2. Należy obliczyć wymiar  $a$  tak, aby element  $K$  po odkształceniu wieszaków pozostał poziomy i określić naprężenia normalne w wieszakach.

Z warunków równowagi ustalamy reakcje  $R_B$  i  $R_D$ , które będą równocześnie siłami podłużnymi w prętach  $AB$  i  $CD$

$$R_B = N_{AB} = P \frac{2,0 - a}{2,0} = 30 \left(1 - \frac{a}{2,0}\right), \quad R_D = N_{DC} = P \frac{a}{2,0} = 30 \cdot \frac{a}{2,0}.$$

Jeżeli element  $K$  ma pozostać po odkształceniu wieszaków poziomy, ich wydłużenia muszą być sobie równe, stąd

$$\Delta l_{AB} = \Delta l_{DC}.$$

Zakładając, że naprężenia w prętach  $AB$  i  $CD$  nie przekraczają granicy proporcjonalności, mamy

$$\frac{N_{AB} \cdot 1,5}{E_s \cdot \frac{\pi d_1^2}{4}} = \frac{N_{CD} \cdot 1,0}{E_m \cdot \frac{\pi d_2^2}{4}}.$$

Po podstawieniu danych, powyższe równanie przyjmuje postać

$$\frac{30(2,0 - a) \cdot 1,5}{2 \cdot 0,02^2} = \frac{30a \cdot 1,0}{1 \cdot 0,025^2},$$

stąd  $a \approx 1,08$  m.

Dla obliczonej wartości  $a$  otrzymujemy siły podłużne i naprężenia w wieszakach

$$N_{AB} = 30 \left(1 - \frac{1,08}{2,0}\right) = 13,8 \text{ kN},$$

$$\sigma_{AB} = \frac{13,8}{3,14 \cdot 0,02^2} \approx 4,40 \cdot 10^4 \text{ kN/m}^2 = 44,0 \text{ MPa},$$

$$N_{CD} = 30 \cdot \frac{1,08}{2,0} = 16,2 \text{ kN},$$

$$\sigma_{CD} = \frac{16,2}{3,14 \cdot 0,025^2} \approx 3,30 \cdot 10^4 \text{ kN/m}^2 = 33,0 \text{ MPa}.$$

#### Zadanie 4.3

Pręt  $BC$  o sztywności nieskończonej jest połączony z nieodkształcalną ścianą przegubem  $C$  i wiotkim cięgnem  $AB$  (por. rys. 4.3a). Obliczyć średnicę cięgna  $d$  i jego wydłużenie jednostkowe przyjmując, że będzie ono wykonane ze stali, dla której moduł sprężystości podłużnej  $E = 2 \cdot 10^5$  MPa, a wytrzymałość obliczeniowa  $R_t = 1,8 \cdot 10^2$  MPa.

Zastępując w podanym układzie pręt  $AB$  siłami  $N_{AB}$  (por. rys. 4.3b) z warunku  $M_C = 0$  otrzymujemy

$$M_C = P \cdot a - N_{BA} \cdot 2a = 0,$$

stąd

$$N_{BA} = \frac{P}{2} = 50 \text{ kN}.$$

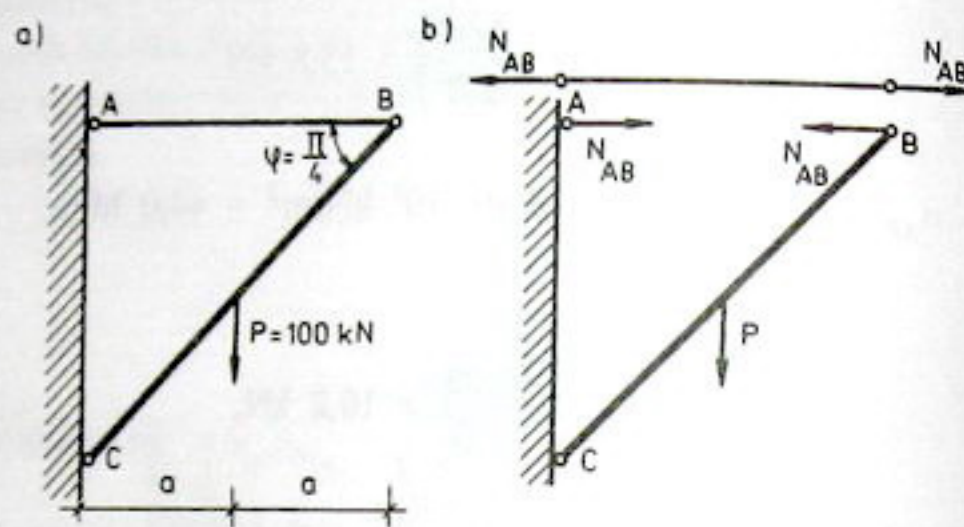
Ponieważ naprężenia w cięgnie nie mogą przekroczyć wytrzymałości obliczeniowej, można zapisać



$$\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{A_{BA}} = \frac{N_{AB}}{\frac{\pi d^2}{4}} \leq R_r,$$

stąd

$$d \geq \sqrt{\frac{N_{AB}}{\frac{\pi}{4} \cdot R_r}} = \sqrt{\frac{50 \cdot 4}{3,14 \cdot 1,8 \cdot 10^5}} \approx 0,019 \text{ m}.$$



Rys. 4.3

Przyjmując  $d = 2 \text{ cm}$ ,  $A_{AB} = \pi \cdot 0,02^2 / 4 = 3,14 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$  otrzymujemy naprężenia w cięgniach

$$\sigma_{AB} = \frac{50 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 10^{-4}} \approx 1,6 \cdot 10^2 \text{ MPa} < R_r,$$

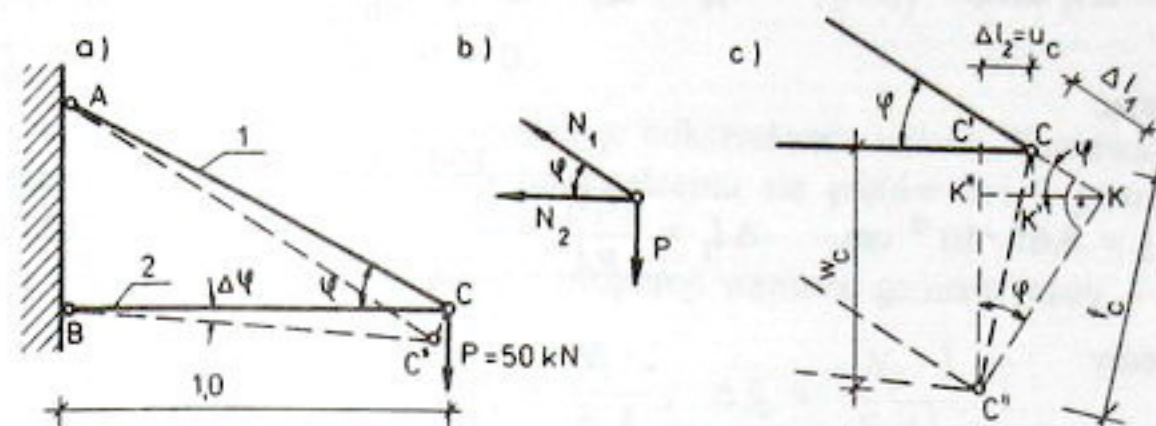
oraz wydłużenie jednostkowe

$$\epsilon = \frac{N_{AB}}{EA_{AB}} = \frac{50 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 3,14 \cdot 10^{-4}} = 7,96 \cdot 10^{-4}.$$

**Zadanie 4.4**

Dla sprężystego układu prętowego, jak na rys. 4.4a, obliczyć naprężenia w prętach i określić położenie punktu C po odkształceniu układu. Długość pręta BC wynosi 1 m,  $\varphi = \pi/6$ , materiał prętów o module sprężystości  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ , przekrój poprzeczny  $A = 5 \text{ cm}^2$ .

W celu uproszczenia zapisów wprowadzono oznaczenie 1 dla pręta AC i 2 – dla pręta BC.



Rys. 4.4

Siły w prętach można wyznaczyć z równowagi węzła C (por. rys. 4.4b), otrzymujemy

$$\sum Z = N_1 \sin \varphi - P = 0, \quad \text{stąd} \quad N_1 = \frac{P}{\sin \varphi} = \frac{50}{\frac{1}{2}} = 100 \text{ kN},$$

$$\sum X = N_1 \cos \varphi + N_2 = 0 \quad \text{stąd} \quad N_2 = -N_1 \cos \varphi = -100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -86,5 \text{ kN}.$$

Naprężenia normalne w prętach 1 i 2 wynoszą

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{100}{5} = 20 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 200 \text{ MPa} \quad (\text{naprężenia rozciągające}),$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{-86,5}{5} = -17,3 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = -173 \text{ MPa} \quad (\text{naprężenia ściskające}).$$

Uwzględniając znaki sił  $N_1$ ,  $N_2$  przewidujemy odkształcenie układu takie jak pokazano na rys. 4.4a. Fragment z węzłem C pokazano w znacznie powiększonej skali na rys. 4.4c. Wiemy, że pręt 1 ulegnie wydłużeniu, pręt 2 zaś – skróceniu. Ponieważ odkształcenia te będą małe w stosunku do długości prętów, kąt  $\Delta \varphi$  będzie także mały, co pozwala nam na przyjęcie  $\cos(\Delta \varphi) \approx 1,0$ . Stąd składowa pozioma przemieszczenia punktu C równa odcinkowi  $CC'$  wynosi

$$u_C = |\Delta l_2| = \frac{|N_2| \cdot l_1}{EA} = \frac{86,5 \cdot 100}{2 \cdot 10^4 \cdot 5} = 8,65 \cdot 10^{-2} \text{ cm}.$$



Składowa pionowa przemieszczenia punktu  $C$  może być przedstawiona jako suma odcinków  $C'K''$  oraz  $K''C''$ , stąd

$$w_C = \Delta l_1 \sin \varphi + (|\Delta l_2| + \Delta l_1 \cos \varphi) \cdot \operatorname{ctg} \varphi = \frac{l}{\sin \varphi} (\Delta l_1 + |\Delta l_2| \cos \varphi).$$

Podstawiając

$$|\Delta l_2| = 8,65 \cdot 10^{-2} \text{ cm}, \quad \Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA} = \frac{100 \cdot 100 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}}{2 \cdot 10^4 \cdot 5} = 11,6 \cdot 10^{-2} \text{ cm},$$

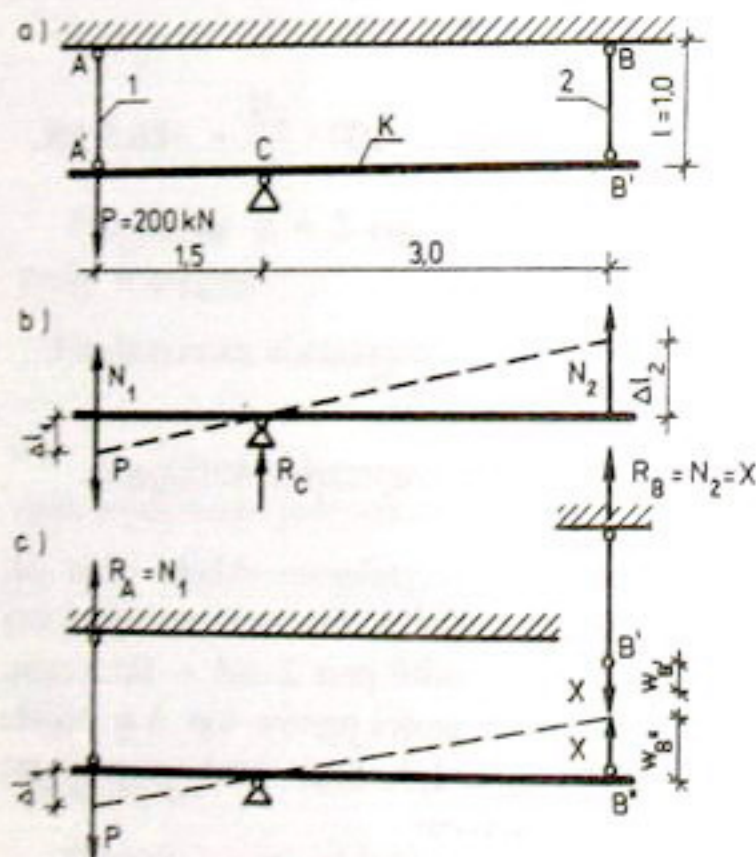
otrzymujemy

$$w_C = 2 \left( 11,6 \cdot 10^{-2} + 8,65 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 38,2 \cdot 10^{-2} \text{ cm}.$$

Przemieszczenie jako odcinek  $CC''$  wynosi

$$f_C = \sqrt{u_C^2 + w_C^2} = \sqrt{(8,65^2 + 38,2^2) \cdot 10^{-4}} = 39,2 \cdot 10^{-2} \text{ cm}.$$

#### Zadanie 4.5



Rys. 4.5

Nieodkształcalny element  $K$  został podwieszony na dwóch sprężystych wieszakach do nieodkształcalnego stropu i podparty podporą przegubową (por. rys. 4.5a). W prętach 1 i 2 układu obliczyć naprężenia normalne. Pola przekroju poprzecznego prętów 1 i 2

$$A_1 = 20 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2,$$

$$A_2 = 10 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2.$$

Pręt 1 wykonano z miedzi – moduł sprężystości podłużnej  $E_1 = 1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ , pręt 2 ze stali –  $E_2 = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ .

Zadanie jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalne, gdyż w trzech podporach  $A, B, C$  wystąpią reakcje o kierunku pionowym, a do ich wyznaczenia dysponujemy tylko dwoma równaniami statyki (równanie  $X = 0$  jest tożsamościowo spełnione).

Po myślowym przecięciu prętów 1, 2 układ musi pozostawać w równowadze pod działaniem sił  $N_1, N_2, R_C, P$  (por. rys. 4.5b). Pozwala to na zapisanie dwóch równań równowagi w postaci

$$1. \sum M_C = N_1 \cdot 1,5 - N_2 \cdot 3,0 - P \cdot 1,5 = 0,$$

$$2. \sum Z = N_1 + N_2 + R_C - P = 0.$$

Trzecie równanie otrzymamy rozważając odkształcenie układu. Ponieważ element  $K$  ma sztywność nieskończoną, po odkształceniu się prętów 1 i 2 pozostanie on prosty (por. rys. 4.5b).

Na tej podstawie możemy zapisać z proporcji warunek geometryczny

$$3. \frac{\Delta l_1}{1,5} = \frac{\Delta l_2}{3,0} \quad \text{gdzie} \quad \Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l}{E_1 A_1}, \quad \Delta l_2 = \frac{-N_2 \cdot l}{E_2 A_2}.$$

Należy zauważyć, że znak przy obliczaniu przemieszczenia zależy od tego czy jest ono zgodne z założonym zwrotem siły – jeżeli tak – przemieszczenie jest dodatnie (por.  $N_1$  i  $\Delta l_1$ ), jeżeli nie – ujemne (por.  $N_2$  i  $\Delta l_2$ ).

Po rozwiązaniu trzech równań z trzema niewiadomymi otrzymujemy

$$N_1 = \frac{1}{5} P = 40 \text{ kN}, \quad N_2 = -\frac{2}{5} P = -80 \text{ kN}, \quad R_C = \frac{6}{5} P = 240 \text{ kN}.$$

Stąd naprężenia normalne w prętach 1 i 2

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{40 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^{-4}} = 20 \text{ MPa} \quad (\text{pręt rozciągany}),$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-80 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = -80 \text{ MPa} \quad (\text{pręt ściskany}).$$

Zadanie takie można też rozwiązać zastępując układ statycznie niewyznaczalny układem statycznie wyznaczalnym (np. takim jak pokazano na rys. 4.5c), w którym w miejsce odrzuconego więzu zostanie zaczepiona nieznana siła  $X$ . Układy pokazane na rys. 4.5a i 4.5c będą ze sobą identyczne jeżeli w drugim układzie (rys. 4.5c) zrealizowany zostanie warunek nierozdzielności, a mianowicie

$$w_{B'} + w_{B''} = 0.$$

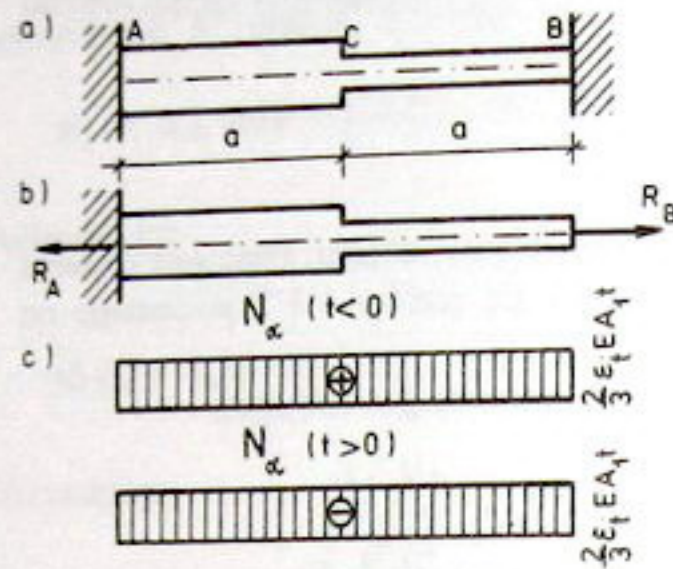
Po podstawieniu

$$w_{B'} = \frac{Xl}{E_2 A_2} = \frac{N_2 l}{E_2 A_2}, \quad w_{B''} = \frac{3,0}{1,5} \cdot \Delta l_1 = 2 \frac{N_1 l}{E_1 A_1},$$

otrzymujemy równanie takie jak równanie przemieszczeniowe ustalone poprzednio (por. równanie 3). Równania równowagi pozostają oczywiście bez zmian.



## Zadanie 4.6



Rys. 4.6

Pręt nieważki, zamocowany w dwóch nieodkształcalnych ścianach (por. rys. 4.6a) został poddany zmianie temperatury o  $t^\circ$  w stosunku do temperatury montażu. Przekrój pręta wynosi  $A_{AC} = A_1$ ,  $A_{CB} = A_2 = \frac{1}{2}A_1$ , pręt wykonano z materiału o module sprężystości podłużnej  $E$  i współczynnika rozszerzalności cieplnej  $\epsilon_t$ . Określić wartość siły podłużnej.

Po zamianie układu na statycznie wyznaczalny (por. rys. 4.6b) otrzymujemy równanie równowagi

$$\sum X = R_A - R_B = 0,$$

stąd

$$R_A = R_B$$

oraz warunek przemieszczeniowy (przyrównując wydłużenie spowodowane reakcjami oraz zmianą temperatury do zera)

$$\Delta l = \frac{R_B a}{EA_2} + \frac{R_B a}{EA_1} + \epsilon_t \cdot t \cdot 2a = 0,$$

stąd

$$R_B = R_A = -\frac{2}{3} \epsilon_t EA_1 t.$$

Łatwo zauważyć, że jeżeli wartość  $t$  będzie dodatnia (podgrzanie w stosunku do temperatury montażu) – pręt będzie ściskany, jeżeli natomiast wartość  $t$  będzie ujemna – pręt ulegnie rozciąganiu (por. rys. 4.6c).

## Zadanie 4.7

Koniec  $B$  pręta nieważkiego (pokazanego na rys. 4.7a) znajduje się w odległości  $\delta < a$  od nieodkształcalnej ściany. Dane dotyczące przekrojów i materiału jak w zadaniu 4.6. Pręt podlega zmianom temperatury.

Obliczyć siłę podłużną w pręcie.

Należy rozważyć trzy przypadki:

1. Jeżeli  $t < 0$  pręt ulega skróceniu – nie powstają w nim więc siły przekrojowe.

2. Jeżeli  $t > 0$  lecz wydłużenie  $\Delta l' = \epsilon_t \cdot t \cdot 2a \leq \delta$ , w pręcie także nie powstaną siły przekrojowe.

3. Jeżeli  $t > 0$  i  $\Delta l' > \delta$ , wówczas pręt staje się statycznie niewyznaczalny, gdyż swobodnemu wydłużaniu się stawia opór nieodkształcalna ściana. Wtedy po zamianie układu na statycznie wyznaczalny (por. rys. 4.7b) zapisujemy warunek równowagi

$$1. \sum X = R_A - R_B = 0, \quad \text{stąd} \quad R_A = R_B$$

oraz warunek geometryczny (wydłużenie spowodowane reakcją oraz wpływem temperatury nie może przekroczyć odległości  $\delta$ )

$$2. \frac{R_B a}{EA_2} + \frac{R_B a}{EA_1} + \epsilon_t \cdot t \cdot 2a = \delta,$$

stąd

$$R_B = R_A = N = -\frac{2}{3} \epsilon_t EA_1 t + \frac{\delta EA_1}{3a}.$$

## Zadanie 4.8

Dany jest pręt o ciężarze właściwym  $\gamma$  (por. rys. 4.8). Sporządzić wykres sił podłużnych.

Zastępując podporę  $B$  reakcją  $R_B$  otrzymujemy układ statycznie wyznaczalny.

Równanie równowagi ma postać

$$1. \sum Z = -R_A + R_B + A_1 \gamma \cdot 4d + A_2 \gamma \cdot 2d = 0,$$

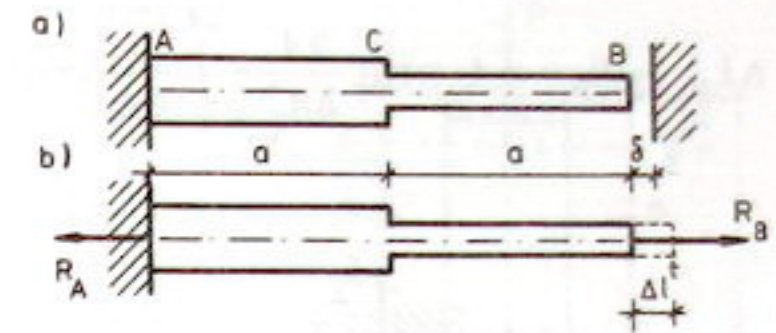
$$\text{gdzie } A_1 = \pi d^2, \quad A_2 = \frac{1}{4} \pi d^2.$$

Warunek geometryczny daje równanie

$$2. \Delta l_{BC} + \Delta l_{CA} = 0.$$

Wydłużenie odcinków  $BC$  i  $CA$

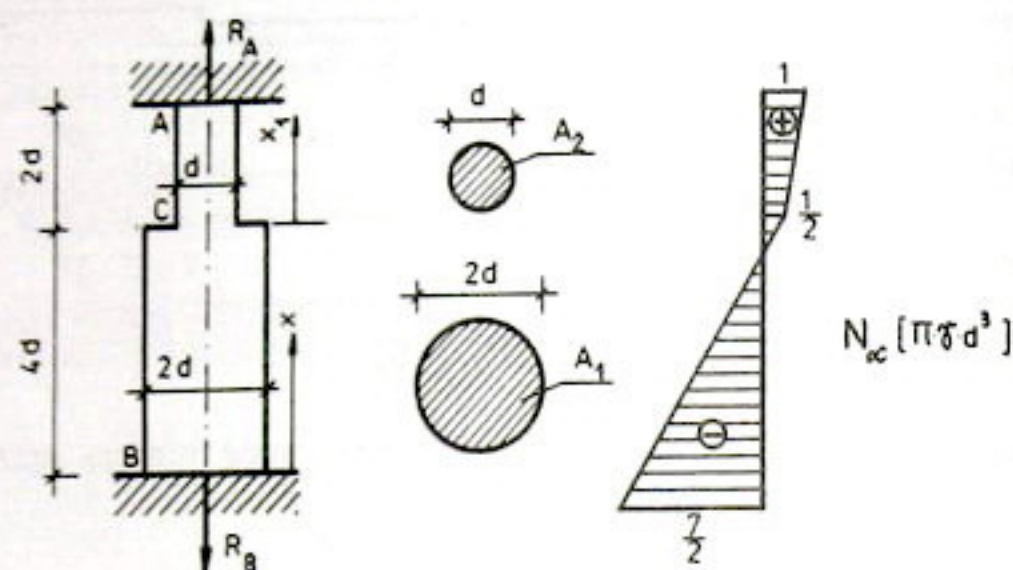
$$\Delta l_{BC} = \frac{R_B \cdot 4d}{EA_1} + \int_0^{4d} \frac{N_x}{EA_1} dx = \frac{R_B \cdot 4d}{EA_1} + \int_0^{4d} \frac{1}{EA_1} (\gamma A_1 x) dx = \frac{4R_B d}{EA_1} + \frac{8\gamma d^2}{E},$$



Rys. 4.7



$$\Delta l_{CA} = (R_B + \gamma A_1 \cdot 4d) \frac{2d}{EA_2} + \int_0^{2d} \frac{1}{EA_2} (\gamma A_2 x_1) dx_1 = \frac{2R_B d}{EA_2} + \frac{8\gamma A_1 d^2}{EA_2} + \frac{2\gamma d^3}{E}$$



Rys. 4.8

Po rozwiązaniu układu równań otrzymujemy

$$R_B = -\frac{7\pi}{2} \gamma d^3, \quad R_A = \pi \gamma d^3.$$

Wykres sił podłużnych jest liniowy, charakterystyczne rzędne wynoszą (por. rys. 4.8)

$$N_B = -\frac{7\pi}{2} \gamma d^3, \quad N_C = -\frac{7\pi}{2} \gamma d^3 + A_1 \gamma \cdot 4d = \frac{\pi \gamma}{2} d^3, \quad N_A = \pi \gamma d^3.$$

#### Zadanie 4.9

Dwa walce współśrodkowe umieszczono między nieodkształcalnymi płytami i poddano działaniu ściskających sił osiowych  $P$  (por. rys. 4.9). Pomiędzy płytą górną a walcem wewnętrznym istnieje szczelina o grubości  $\delta$ . Wymiary walców podano na rys. 4.9, moduły sprężystości materiału walców wynoszą – walec zewnętrzny  $E_1$ , walec wewnętrzny  $E_2 = 2E_1$ , długość szczeliny  $\delta = \frac{Pl}{E_1 \cdot 3\pi d^2}$ .

Sporządzić wykres naprężeń normalnych w przekroju poprzecznym układu. Tarcia między płaszczyznami styku walców nie uwzględniać.

Ze względu na istnienie szczeliny  $\delta$  należy sprawdzić czy zadanie jest statycznie wyznaczalne, w takim wypadku skrócenie walca zewnętrznego wyniosłoby

$$\Delta l = \frac{Pl}{E_1 A_1} = \frac{Pl}{E_1 \cdot \frac{3}{4} \pi d^2}$$

gdzie

$$A_1 = \frac{\pi (2d)^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3}{4} \pi d^2.$$

Ponieważ obliczona wartość  $\Delta l$  jest większa od  $\delta$ , zadanie jest statycznie niewyznaczalne, a obciążenie  $P$  powoduje ściskanie obu walców, wywołując w nich odpowiednie naprężenia normalne ściskające  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ . Stąd warunek równowagi

$$1. P = \sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2,$$

gdzie:

$$A_1 = \frac{3}{4} \pi d^2, \quad A_2 = \frac{1}{4} \pi d^2.$$

Przy nieodkształcalnych płytach warunek geometryczny zapisuje się następująco:

$$2. \Delta l_1 = \Delta l_2 + \delta,$$

gdzie:

$$\Delta l_1 = l \varepsilon_1 = l \frac{\sigma_1}{E_1}, \quad \Delta l_2 = (l - \delta) \varepsilon_2 \approx l \frac{\sigma_2}{E_2} = l \frac{\sigma_2}{2E_1}.$$

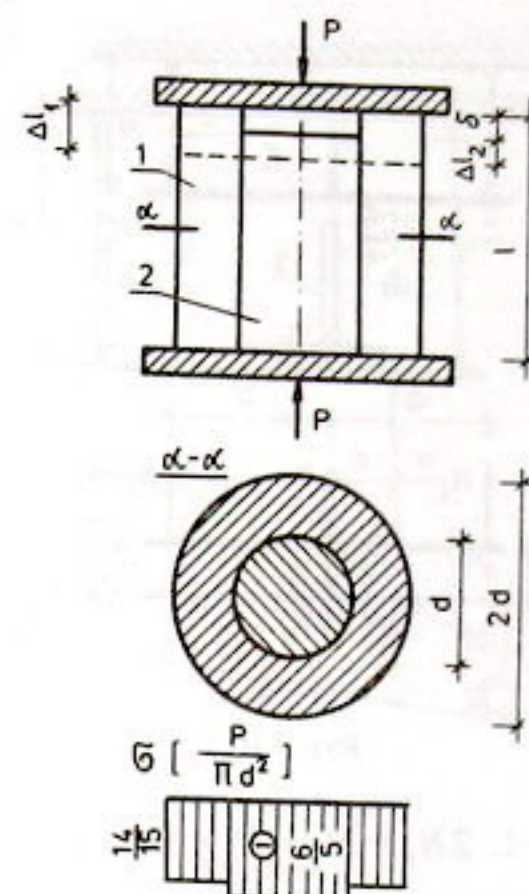
Rozwiązując układ równań otrzymujemy

$$\sigma_1 = \frac{14}{15} \frac{P}{\pi d^2}, \quad \sigma_2 = \frac{6}{5} \frac{P}{\pi d^2}.$$

Wykres naprężeń normalnych w przekroju poprzecznym obu walców pokazano na rys. 4.9.

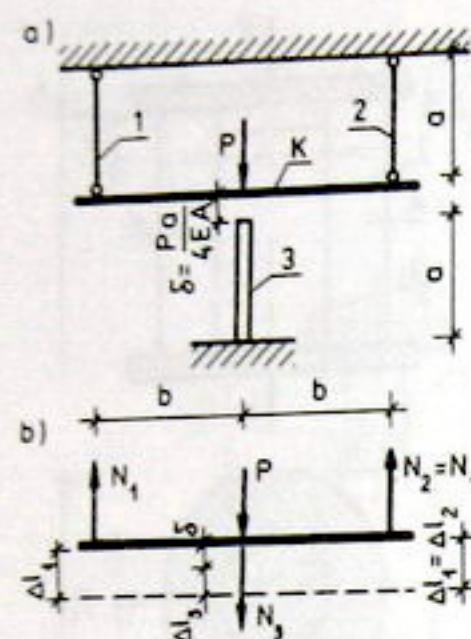
#### Zadanie 4.10

Sztywny element  $K$  podwieszono na sprężystych wieszakach 1, 2 do nieodkształcalnego stropu. Poniżej elementu  $K$  znajduje się sprężysty słup 3, odległość



Rys. 4.9





Rys. 4.10

$$1. 2N_1 - N_3 - P = 0$$

oraz warunek geometryczny

$$2. \Delta l_1 = \delta + \Delta l_3, \quad \text{gdzie:} \quad \Delta l_1 = \frac{N_1 a}{EA}, \quad \Delta l_3 = -\frac{N_3 a}{2EA}.$$

Po rozwiązaniu powyższego układu równań otrzymujemy

$$N_1 = N_2 = \frac{3}{8}P \quad (\text{pręty 1, 2 są rozciągane}),$$

$$N_3 = -\frac{1}{4}P \quad (\text{pręt 3 jest ściskany}).$$

#### Zadanie 4.11

Sztywna belka obciążona siłą  $P$  jest podwieszona do nieodkształcalnego stropu na trzech wieszakach (por. rys. 4.11a). Pręt 2 został wykonany z błędem montażu  $\delta < 4a$ , pręt 3 podlega wzrostowi temperatury o  $t$ . Należy obliczyć siły w prętach układu, przyjmując dane: przekroje prętów  $A_1 = A_2 = A_3 = A$ , moduł sprężystości podłużnej  $E_1 = E_2 = E_3 = E$  i współczynniki rozszerzalności cieplnej  $\epsilon_t$ .

Zakładając, że wieszaki będą rozciągane (por. przyjęte zwroty sił podłużnych na rys. 4.11b) równania równowagi zapisują się następująco

$$1. \sum M = N_1 \cdot 6a + N_2 \cdot 2a - P = 0,$$

$$2. \sum Z = N_1 + N_2 + N_3 - P = 0.$$

Warunek geometryczny (por. rys. 4.11b) daje równanie

$$3. \frac{(\Delta l_3 + \Delta l'_3) - \Delta l_1}{6a} = \frac{(\Delta l_2 - \delta) - \Delta l_1}{4a},$$

między górną powierzchnią słupka a elementem  $K$  wynosi  $\delta$ . Dane o przekrojach i materiale prętów 1, 2, 3 są następujące:  $A_1 = A_2 = A$ ,  $A_3 = 2A$ ,  $E_1 = E_2 = E_3 = E$ , pozostałe dane pokazano na rys. 4.10a. Obliczyć siły podłużne w prętach układu.

Zadanie jest statycznie niewyznaczalne, ponieważ

$$\frac{P}{2} \frac{a}{EA} > \delta = \frac{Pa}{4EA}.$$

Przy założeniu sił podłużnych w prętach układu jak na rys. 4.10b otrzymujemy warunek statyczny

w którym związki fizyczne zapisują się następująco:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot 4a}{EA}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot 4a}{EA},$$

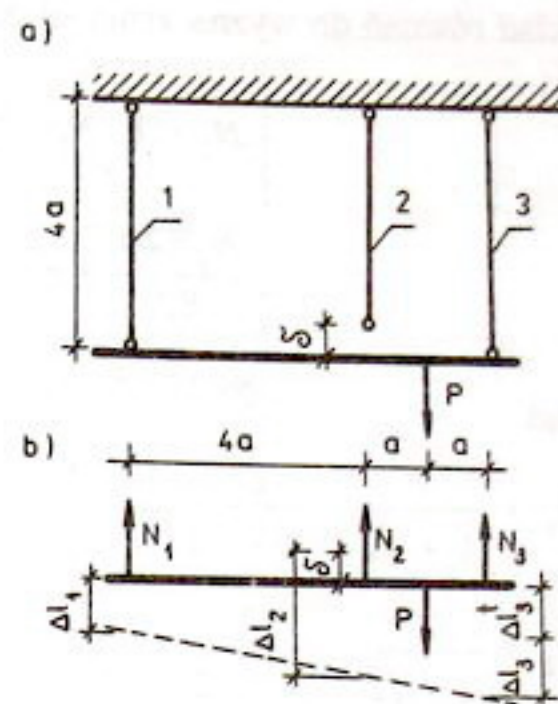
$$\Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot 4a}{EA}, \quad \Delta l'_3 = \epsilon_t \cdot 4a \cdot t,$$

Po rozwiązaniu układu równań otrzymujemy

$$N_1 = \frac{4}{112}P - \frac{16}{112}\epsilon_t \cdot t \cdot EA - \frac{6}{112}\delta \frac{EA}{a},$$

$$N_2 = \frac{44}{112}P + \frac{48}{112}\epsilon_t \cdot t \cdot EA + \frac{18}{112}\delta \frac{EA}{a},$$

$$N_3 = \frac{64}{112}P - \frac{32}{112}\epsilon_t \cdot t \cdot EA - \frac{12}{112}\delta \frac{EA}{a}.$$



Rys. 4.11

#### Zadanie 4.12

Dla układu prętowego pokazanego na rys. 4.12a obliczyć siły przekrojowe w prętach spowodowane siłą  $P$  oraz równomiernym ogrzaniem pręta 1-2 o temperaturę  $t$  w stosunku do temperatury montażu. Przekroje wszystkich prętów wynoszą  $A$ , materiał o module sprężystości podłużnej  $E$  i współczynniku rozszerzalności cieplnej  $\epsilon_t$ .

Zakładając zwroty sił podłużnych w prętach i uwzględniając symetrię układu i obciążenia (rys. 4.12b) otrzymujemy warunek równowagi węzła 2 w postaci

$$\sum Z = N_1 + 2 \cdot N_2 \cdot \cos \alpha - P = 0.$$

Warunek geometryczny przy uwzględnieniu założenia małych odkształceń ( $\Delta a \approx 0$ ) zgodnie z rys. 4.12c można zapisać następująco:

$$\Delta l_{1-2} = \frac{\Delta l_{2-3}}{\cos \alpha},$$

gdzie:  $\Delta l_{1-2} = \frac{N_1 \cdot 2a}{EA} + \epsilon_t \cdot 2a \cdot t$  – przyrost długości pręta 1-2,

$$\Delta l_{2-3} = \frac{N_2 \cdot a\sqrt{2}}{EA} \quad \text{– skrócenie prętów 2-3 i 2-4.}$$



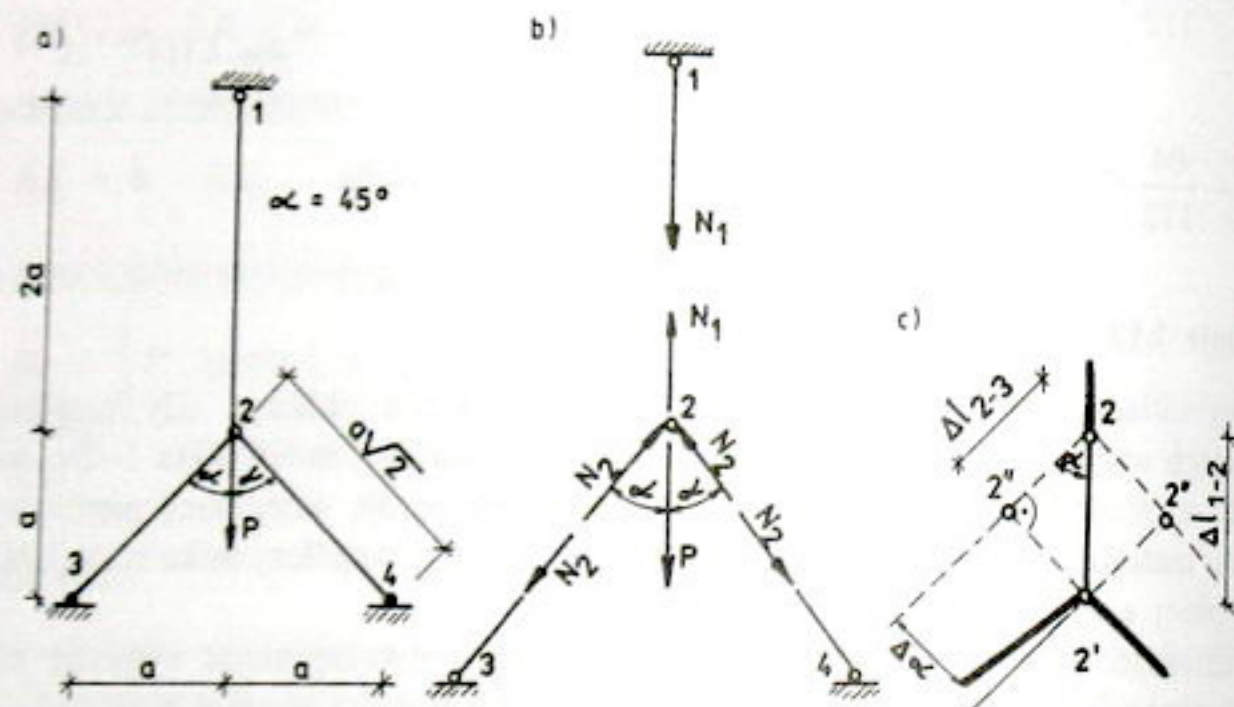
Układ równań do wyznaczenia sił  $N_1$  i  $N_2$  przyjmuje postać:

$$\begin{cases} N_1 + 2 \cdot N_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - P = 0, \\ \frac{N_1 \cdot 2a}{EA} + \epsilon_t \cdot 2a \cdot t - \frac{N_2 \cdot a\sqrt{2}}{EA} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = 0, \end{cases}$$

stąd:

$$N_1 = \frac{P}{1 + \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \cdot \epsilon_t \cdot EA \cdot t - \text{siła } P \text{ powoduje rozciąganie pręta, a oddziaływanie termiczne – jego ściskanie;}$$

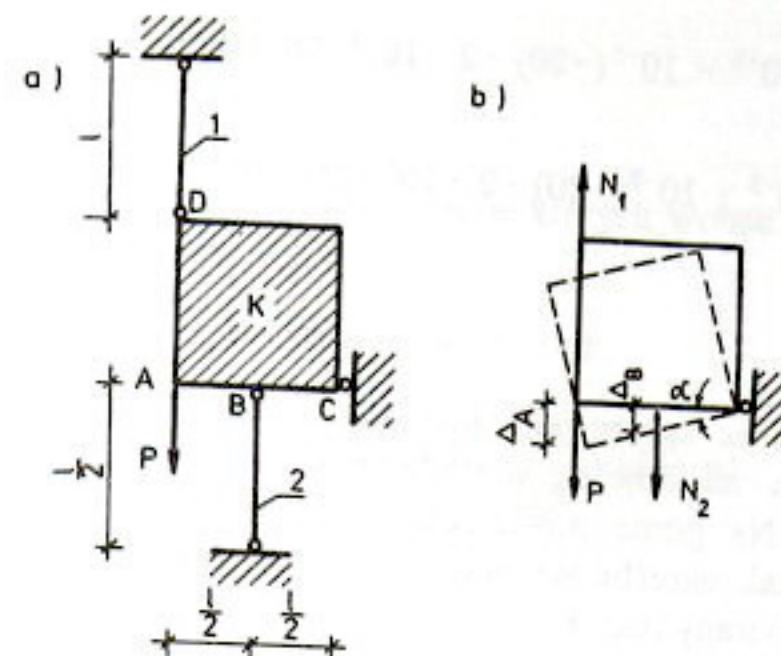
$$N_2 = \frac{P}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \cdot \epsilon_t \cdot EA \cdot t - \text{siła } P \text{ oraz oddziaływanie termiczne powodują ściskanie prętów.}$$



Rys. 4.12

#### Zadanie 4.13

Sztywna tarcza  $K$  jest podparta przegubowo w punkcie  $C$  oraz dwoma prętami sprężystymi 1, 2 (por. rys. 4.13a). Obliczyć siły w prętach spowodowane obciążeniem siłą  $P$  oraz obniżeniem temperatury pręta 1 o  $t = -20^\circ\text{C}$  w stosunku do temperatury montażu. Pozostałe dane:  $A_1 = A_2 = A = 10\text{ cm}^2$ ,  $E_1 = E_2 = E = 2 \cdot 10^5\text{ MPa}$ ,  $\epsilon_t = 1 \cdot 10^{-5}\text{ 1/}^\circ\text{C}$ ,  $P = 10\text{ kN}$ .



Rys. 4.13

Zastępując pręty 1, 2 siłami  $N_1$  i  $N_2$  (por. rys. 4.13b) możemy zapisać warunek równowagi

$$1. \sum M_C = N_1 \cdot l - N_2 \cdot \frac{l}{2} - P \cdot l = 0.$$

Przyjmując, że kąt  $\alpha$  jest bardzo mały ( $\cos \alpha \approx 1$ ) warunek geometryczny możemy zapisać w postaci

$$2. \frac{\Delta_A}{l} = \frac{\Delta_B}{\frac{l}{2}},$$

$$\text{gdzie: } \Delta_A = \Delta l_1 + \Delta l_1' = \frac{N_1 l}{E_1 A_1} + \epsilon_t t l,$$

$$\Delta_B = \Delta l_2 = -\frac{N_2 \cdot \frac{l}{2}}{E_2 A_2}.$$

Z rozwiązania układu równań otrzymujemy

$$N_1 = \frac{1}{3} (2P - \epsilon_t t EA), \quad N_2 = -\frac{2}{3} (P + \epsilon_t t EA).$$

Po podstawieniu danych liczbowych wynik obliczenia sił podłużnych jest następujący:

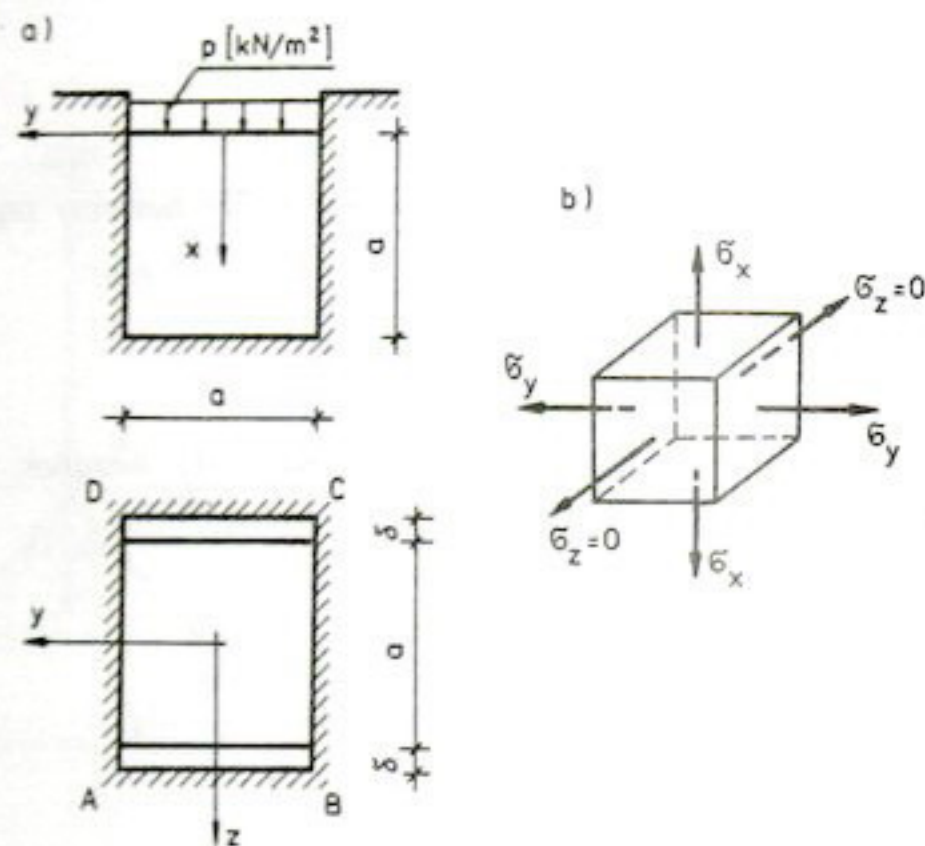


$$N_1 = \frac{1}{3} [2 \cdot 10 \cdot 10^{-3} - 10^{-5}(-20) \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-4}] = 20 \cdot 10^{-3} \text{ MN} = 20 \text{ kN},$$

$$N_2 = -\frac{2}{3} [10 \cdot 10^{-3} + 10^{-5}(-20) \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-4}] = 20 \cdot 10^{-3} \text{ MN} = 20 \text{ kN}.$$

#### Zadanie 4.14

Prostopadłościan ze sprężystego materiału o module sprężystości podłużnej  $E$  i liczbie Poissona  $\nu$  znajduje się w studzience o nieodkształcalnych ścianach i dnie (por. rys. 4.14a). Na górną powierzchnię prostopadłościanu działa równomierny nacisk  $p$ . Należy tak określić wymiar szczeliny  $\delta$ , aby na ściany  $AB$  i  $DC$  studzienki nie był wywierany nacisk.



Rys. 4.14

Z warunków zadania wynika, że mamy tu do czynienia z dwuosiowym stanem naprężenia (por. rys. 4.14b), gdyż naprężenie  $\sigma_z = 0$ .

Wydłużenia jednostkowe możemy więc zapisać następująco:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y), \quad \epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x), \quad \epsilon_z = \frac{1}{E} [-\nu (\sigma_x + \sigma_y)].$$

Z warunków zadania wynika, że

$$1. \quad \epsilon_y = 0,$$

$$2. \quad \epsilon_z = \frac{2\delta}{a}.$$

Otrzymujemy w ten sposób dwa równania, w których wobec  $\sigma_x = -p$ , wielkościami nieznanymi są  $\sigma_y$  oraz  $\delta$ .

$$1. \quad \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(-p)] = 0, \quad \text{stąd} \quad \sigma_y = -\nu p.$$

$$2. \quad \frac{1}{E} [-\nu(-p - \nu p)] = \frac{2\delta}{a}, \quad \text{stąd} \quad \delta = \frac{pa}{2E} \nu(1 + \nu).$$